Charakteryzacja WWO c.d.

Lemat 1 Jeśli $E : L_1(\mu) \to L_1(\mu)$ dodatni rzut o normie 1, to jego obraz

$$M = E(L_1(\mu)) \text{ jest domkniętą podkratą } L_1(\mu)$$

Dowód:

„Domkniętość M"

Jeśli $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ oraz $x_n \xrightarrow{L_1} x \in L_1(\mu)$, to

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \underset{\substack{E^2=E \\ x_n \in E(L_1(\mu))}}{=} \lim_{n\to\infty} E(x_n) \underset{E \text{ ciągły}}{=} E(\lim_{n\to\infty} x_n) = E(x)$$

Tzn. $x \in M$.

„M podkratą" $\Leftrightarrow$ „domkniętość na $\vee$ oraz $\wedge$"

Zauważmy, że

$$h \vee g = \frac{h+g+|h-g|}{2}, \quad h \wedge g = \frac{h+g-|h-g|}{2}$$

oraz

$$|f| = f^+ + f^- = f^+ + (-f)^+$$

zatem, skoro M jest podprzestrzenią liniową, wystarczy pokazać, że

$f \in M \Rightarrow$

$f^+ \in M$

pokażmy, że

$$f \in M \Rightarrow f^+ \in M$$

$\boxed{\begin{array}{l} f \in M \Leftrightarrow \\ E(f) = f \\ (\text{bo } E^2 = E) \end{array}}$

Niech $f \in M$

E dodatnia

$$f^+ - f = f^- \geq 0 \Rightarrow E(f^+ - f) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(f^+) \geq E(f) \underset{\uparrow \text{ bo } f \in M}{=} f$$

Czyli

$$E(f^+) \geq f \quad \text{i} \quad E(f^+) \geq 0$$

Stąd

$$E(f^+) \geq f \vee 0 = \max\{f, 0\} = f^+$$

Zatem

$$\| E(f^+) - f^+ \|_1 = \int_\Omega \underbrace{E(f^+) - f^+}_{\geq 0} \, d\mu =$$

$$= \int_\Omega E(f^+) \, d\mu - \int_\Omega f^+ \, d\mu = \| E(f^+) \|_1 - \| f^+ \|_1$$

$\|E\| \leq 1$

$$\leq \| f^+ \|_1 - \| f^+ \|_1 = 0$$

Czyli $E(f^+) = f^+$, tzn. $f^+ \in M$. ∎

Czyli $E(f|F) = f$, tzn. [illegible] $\blacksquare$

Lemat 2 Każdy operator liniowy $Q: L_1(\mu) \to L_1(\mu)$ który zachowuje jedynkę i jest kontrakcją jest dodatni. Tzn.

$$Q1 = 1, \ \|Q\| = 1 \implies Q \geq 0 \quad \text{czyli } \forall_{f \geq 0} \ Qf \geq 0$$

Dowód: Niech $0 \leq f \leq 1$. Wtedy

$$\|1\|_1 - \|f\|_1 \underset{\uparrow}{=} \|\underbrace{1-f}_{\geq 0}\|_1 \underset{\|Q\|=1}{\geq} \|Q(1-f)\|_1 =$$

$$\boxed{\int_\Omega 1 \, d\mu - \int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega 1 - f \, d\mu}$$

$$= \|Q1 - Qf\|_1 \underset{Q1=1}{=} \|1 - Qf\|_1 \underset{\|x-y\| \geq \|x\| - \|y\|}{\geq} \|1\| - \|Qf\|_1$$

$$\underset{\|Q\|=1}{\geq} \|1\|_1 - \|f\|_1 .$$

Czyli lewa strona = prawa strona. Stąd

$$\|1\|_1 - \|Qf\|_1 = \|1 - Qf\|_1$$

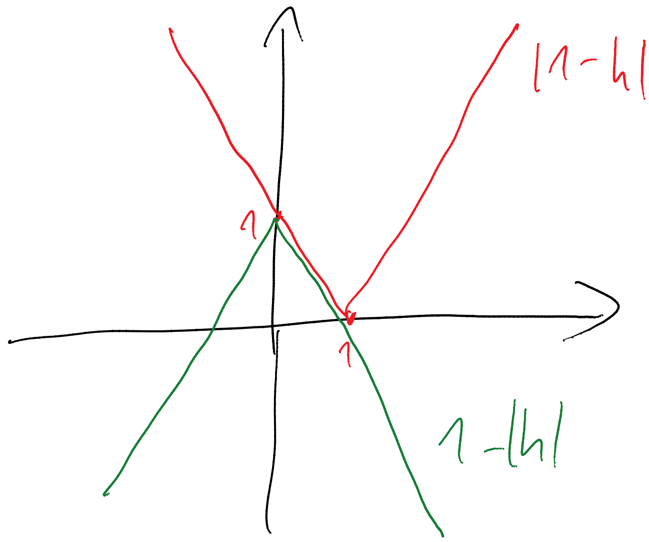
To implikuje $\boxed{0 \leq Qf \leq 1}$ Rzeczywiście,

$$\|1\|_1 - \|h\|_1 = \|1 - h\|_1 \iff \int_\Omega 1 \, d\mu - \int_\Omega |h| \, d\mu = \int_\Omega |1-h| \, d\mu$$

$$\iff \int_\Omega \underline{|1-h|} - 1 + |h| \, d\mu = 0 \iff |1-h| = 1 - |h|$$

$$\iff \int_\Omega \underbrace{\underbrace{|1-h|}_{\geq 1-|h|} - 1 + |h|}_{\geq 0} \, d\mu = 0 \iff |1-h| = 1-|h|$$

$$\iff 0 \leq h \leq 1$$



Zatem biorąc $h = Qf$ otrzymujemy (*).

Stąd

$f \geq 0$ i f ograniczona $\Rightarrow 0 \leq \frac{f}{\|f\|_\infty} \leq 1$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} 0 \leq Q\left(\frac{f}{\|f\|_\infty}\right) \leq 1 \Rightarrow Qf \geq 0$$

Jeżeli $f \geq 0$ dowolna (niekoniecznie ograniczona) to kładąc $f_n := f \wedge n = \min\{f, n\}$ mamy ciąg funkcji ograniczonych, nieujemnych t.że $f_n \nearrow f$ (wtedy z tw. o zbieżności monotonicznej $f_n \xrightarrow{L^1} f$, bo $\|f - f_n\|_1 = \int_\Omega f \, d\mu - \int_\Omega f_n \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$)

Stąd

$$Qf = Q\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) = \lim_{n\to\infty} Q(f_n) \geq 0.$$

Q ciągły nieujemne i ograniczone

Czyli Q operator dodatni ■

TW (Douglas 1965) Operator $E: L_1(\mu) \to L_1(\mu)$ jest WWO $\iff$ $E^2 = E$, $\|E\| = 1$, $E(1) = 1$.

Dowód: „$\Rightarrow$" jasne (już było)

„$\Leftarrow$" Z Lematu 2 oraz stąd, że $\|E\| = 1$, $E(1) = 1$ wynika, że E jest dodatni.

Z Lematu 1 otrzymujemy, że obraz $M := E(L_1(\mu))$ jest domkniętą podkratą $L_1(\mu)$.

Skoro $1 = E(1) \in M$, to na mocy STWIERDZENIA

$$M = L_1(\mu|\mathcal{G}) \text{ dla pewnej } \sigma\text{-podalgebry } \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$$

Pokażemy, że E jest WWO względem $\mathcal{G}$.

Warunek (W1) jest spełniony, bo

$\forall$ $E(f) \in M = L_1(\mu|\mathcal{G})$

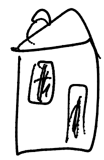
więc $E(f)$ jest funkcją $\mathcal{G}$-mierzalną gdy $E(f)$ jest funkcją $\mathcal{G}$-mierzalną

$f \in L_1(\mu)$

$$\int_A E(f)\, d\mu = \int_A f\, d\mu$$

(W2) $\forall A \in \mathcal{G}$

Wystarczy pokazać (W2) w przypadku, gdy $f = \mathbb{1}_B$ jest funkcją charakterystyczną zbioru $B \in \mathcal{F}$.



Czyli chcemy pokazać

$$\forall_{A \in \mathcal{G}} \ \forall_{B \in \mathcal{F}} \quad \boxed{\int_A E(\mathbb{1}_B)\, d\mu = \int_A \mathbb{1}_B\, d\mu}$$

Niech $A \in \mathcal{G}$, $B \in \mathcal{F}$. Wtedy

$$\mathbb{1}_A \underset{E^2=E}{=} E(\mathbb{1}_A) \underset{\substack{E \text{ monotoniczny} \\ \mathbb{1}_A \geq \mathbb{1}_{B\cap A}}}{\geq} E(\mathbb{1}_{B \cap A})$$

$$\boxed{\mathbb{1}_{A'} = E(\mathbb{1}_{A'}) \geq E(\mathbb{1}_{B \cap A'})}$$

$$\Downarrow$$

$$0 \leq \int_A \underbrace{E(\mathbb{1}_{B \cap A'})}_{\geq 0} d\mu \leq \int_A \mathbb{1}_{A'}\, d\mu = 0$$

Czyli $\boxed{\int_A E(\mathbb{1}_{B\cap A'})\, d\mu = 0.}$

Stąd

$$\int_A E(\mathbb{1}_B)\, d\mu = \int_A E(\mathbb{1}_{B \cap A} + \mathbb{1}_{B \cap A'})\, d\mu =$$

$$\int_A E(1\!\!1_B)\,d\mu = \int_A E(1\!\!1_{B\cap A} + 1\!\!1_{B\cap A'})\,d\mu =$$

$$= \int_A E(1\!\!1_{B\cap A})\,d\mu + \boxed{\int_A E(1\!\!1_{B\cap A'})\,d\mu} \quad = 0$$

$$= \int_A E(1\!\!1_{B\cap A})\,d\mu$$

$$\leq \int_\Omega E(1\!\!1_{B\cap A})\,d\mu$$

$$= \|E(1\!\!1_{B\cap A})\|_1$$

$$\underset{\|E\|=1}{\leq} \|1\!\!1_{B\cap A}\|_1 = \int_\Omega 1\!\!1_{B\cap A}\,d\mu$$

$$= \int_A 1\!\!1_B\,d\mu$$

Zatem

$$\forall_{B\in F} \quad \int_A 1\!\!1_B\,d\mu \geq \int_A E(1\!\!1_B)\,d\mu \quad (**)$$

Stosując tę nierówność otrzymamy oraz to, że $E(1)=1$ równość:

$$\int_A \underset{1\!\!1_\Omega = 1\!\!1_B + 1\!\!1_{B'}}{1}\,d\mu = \int_A 1\!\!1_B\,d\mu + \int_A 1\!\!1_{B'}\,d\mu \quad (**) \times 2$$

$$\overset{(**)}{\geq} \int_A E(1\!\!1_B)\,d\mu + \int_A E(1\!\!1_{B'})\,d\mu$$

$$\overset{\text{liniowość}}{=} \int_A E(1\!\!1_B + 1\!\!1_{B'})\,d\mu = \int_A E(1)\,d\mu$$

$$\overset{E(1)=1}{=} \int_A 1 \, d\mu$$

Stąd

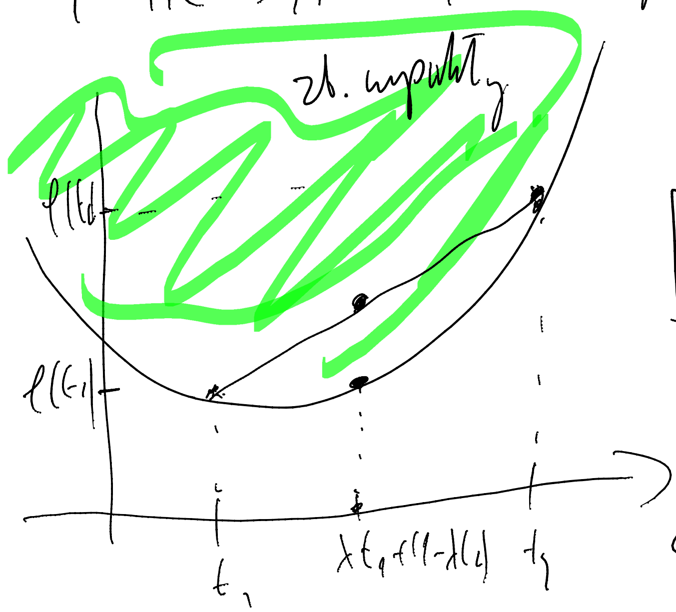
$$\int_A \mathbb{1}_B \, d\mu + \int_A \mathbb{1}_{B'} \, d\mu = \int_A E(\mathbb{1}_B) \, d\mu + \int_A E(\mathbb{1}_{B'}) \, d\mu$$

$$\xrightarrow{(**)} \boxed{\int_A \mathbb{1}_B \, d\mu = \int_A E(\mathbb{1}_B) \, d\mu} \quad \left(\text{oraz } \int_A \mathbb{1}_{B'} \, d\mu = \int_A E(\mathbb{1}_{B'}) \, d\mu \right)$$

Nierówność Jensena

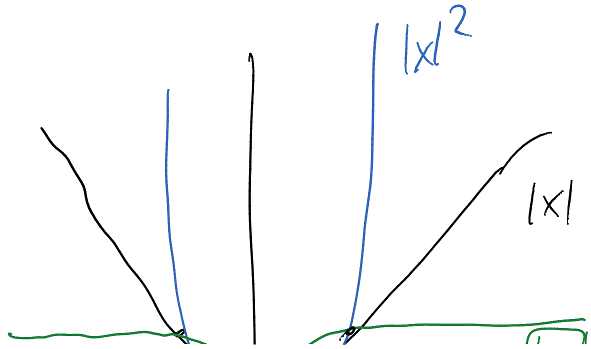
$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest wypukła $\iff \forall_{t_1, t_2 \in \mathbb{R}} \ \forall_{\lambda \in [0,1]}$

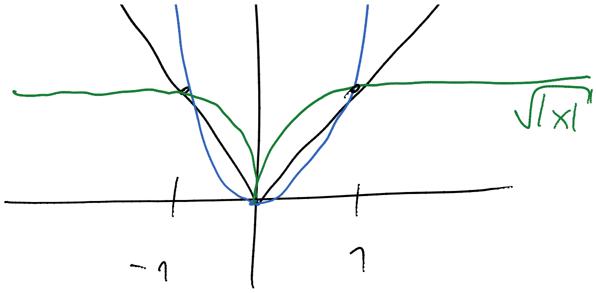
$$\varphi(\lambda t_1 + (1-\lambda) t_2) \le \lambda \varphi(t_1) + (1-\lambda) \varphi(t_2)$$



Przykład:

$\varphi(x) = |x|^p$ jest wypukła $\iff p \ge 1$





Tw. Funkcja φ jest wypukła $\iff$ φ jest supremum funkcji afinicznych, tzn.

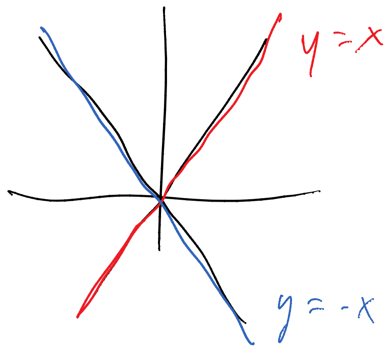
$$\varphi(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} (a_n x + b_n)$$

dla pewnych ustalonych $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$

Dowód: FAKT ZNANY ~~ZNANY~~ Z ANALIZY (BEZ DOWODU)

Przykład: $|x| = \max\{x, -x\}$

$\boxed{a_1 = 1,\ b_1 = 0}$, $\boxed{a_2 = -1,\ b_2 = 0}$



Tw. (Nierówność Jensena)

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ pr. z miarą skończoną oraz $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$

Niech φ wypukła oraz $X, \varphi(X) \in L_1(\mu)$ $\boxed{\varphi(X) = \varphi \circ X}$

Wtedy

$$\varphi(E(X|\mathcal{G})) \leq E(\varphi(X)|\mathcal{G}).$$

Dowód: Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ takie, że

$$\varphi(x) = \sup_n (a_n x + b_n)$$

Stąd

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad \varphi(X) \geqslant a_n X + b_n$$

Zatem z monotoniczności WWO (oraz liniowości WWO)

$$\forall_n \quad E(\varphi(X) | \mathcal{G}) \overset{p.w.}{\geqslant} E(a_n X + b_n | \mathcal{G}) = a_n E(X|\mathcal{G}) + b_n$$

Jest to przeliczalnie wiele nierówności. Zatem

$$E(\varphi(X) | \mathcal{G}) \overset{p.w}{\geqslant} \sup_{n \in \mathbb{N}} (a_n E(X|\mathcal{G}) + b_n) = \varphi(E(X|\mathcal{G})).$$

∎